**Gewone differentiaalvergelijkingen**
Cursus 2002-2003.
Eerste hertentamen, 13 mei 2003, duur: 3 uur.

Licht je antwoorden bondig toe; geef bijvoorbeeld aan welke oplossingsmethode of welke stelling je gebruikt.

1.[1] Beschouw de differentiaalvergelijking $y' = x+y$, $y(0) = 1$. Bepaal de eerste vijf termen van de Taylorreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}}{n!} x^n$ van de oplossing $y(x)$ om $x = 0$
(i)[2] door de differentiaalvergelijking te differentiëren,
(ii)[4] via Picard iteratie en
(iii)[3] door de differentiaalvergelijking op te lossen.

2.[1](a)[4] Los op: $xy^2y' = y^3 - x^3$. Laat zien dat je antwoord klopt. Bespreek de maximale definitiegebieden van de oplossingen.
(b)[5] Een oplossing van $(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y =$ heeft de vorm $y(x) = \mathrm{e}^{ax}$. Bepaal door verlaging van de graad een oplossing die hiervan linear onafhankelijk is.

3.[1](a)[6] Toon aan dat, op één na, alle oplossingen van $u''(t) = 1 - \mathrm{e}^{-u(t)}$ periodiek zijn. Welke oplossing is de uitzondering? (Aanwijzing: Stel $x = u$ en $y = u'$. Schets het faseportret van het autonome systeem waaraan $(x(t), y(t))$ voldoet. Bepaal daarvoor de differentiaalvergelijking voor $y$ als functie van $x$ en los die op.)
(b)[3] Bepaal de algemene oplossing van $y'' + 2y' - 3y = \mathrm{e}^{-3x}$.

4.[1](a)[3] De $n \times n$-matrix $A(x)$ en de $n$-vector $b(x)$ zijn continu in $x$ op het interval $J$. Verklaar waarom alle oplossingen $y(x)$ van $y' = A(x)y + b(x)$ gedefinieerd zijn op het hele interval $J$.(Aanwijzing: Picard-Lindelöf.)
(b)[6] Bepaal de fundamentaal matrix $Y(x)$ van $y' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y$ die voldoet aan $Y(0) = I$.

*Z.O.Z.*

5.[1] Beschouw de differentiaaluitdrukking $L_\mu y = y'' - \mu^2 y$, $\mu \in \mathbb{R}$. Definieer

$$\mathcal{L}_\mu : \{y \in C^2[0,1] \,|\, y(0) - y'(0) = 0,\; y(1) = 0\} \to C[0,1]$$

door $\mathcal{L}_\mu y = L_\mu y$.
(i)[3] Bewijs: $\mathcal{L}_\mu$ is inverteerbaar voor alle $\mu \in \mathbb{R}$. Welke stelling pas je toe? (Aanwijzing: Maak onderscheid tussen $\mu = 0$ en $\mu \neq 0$ en gebruik dat de grafieken van de functies $y = e^{2\mu}$ en $y = \frac{1-\mu}{1+\mu}$ elkaar alleen in $\mu = 0, y = 1$ snijden.)
(ii)[2] Bewijs: Als $\mathcal{L}_\mu y = \lambda y$ en $y \not\equiv 0$, dan is $\lambda < 0$ (Aanwijzing: Bewijs $\langle \mathcal{L}_\mu y, y\rangle < 0$ waarbij $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx$.)
(iii)[4] Bepaal de inverse van $\mathcal{L}_0$ op twee manieren:
(a) via de Greense functie en (b) door $y'' = f(x)$ twee keer te integereren en de twee integratie constanten uit te rekenen.